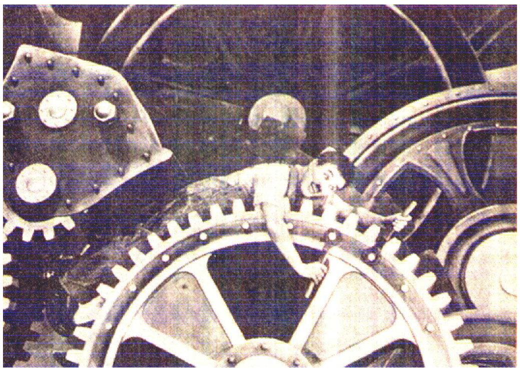
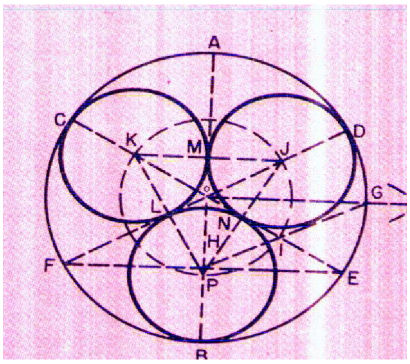
COLÉGIO
ARNALDO

TERCEIRA SÉRIE
ENSINO MÉDIO
INTEGRADO

Revisão:
Geometria Plana





TRIÂNGULOS E POLÍGONOS CONVEXOS

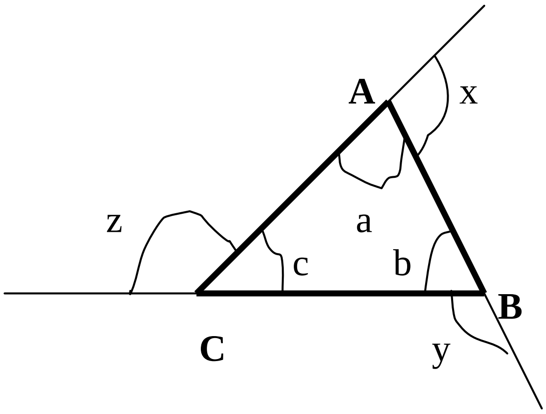
Prof. Rogério Rodrigues

NOME : ....

NÚMERO : .... TURMA : ....

III - TRIÂNGULOS E POLÍGONOS CONVEXOS

III . 1) DEFINIÇÃO E ELEMENTOS : Todo polígono de três lados é chamado **Triângulo** . Observe os elementos de um triângulo pela figura a seguir :



→ **Vértices :** A , B e C ;

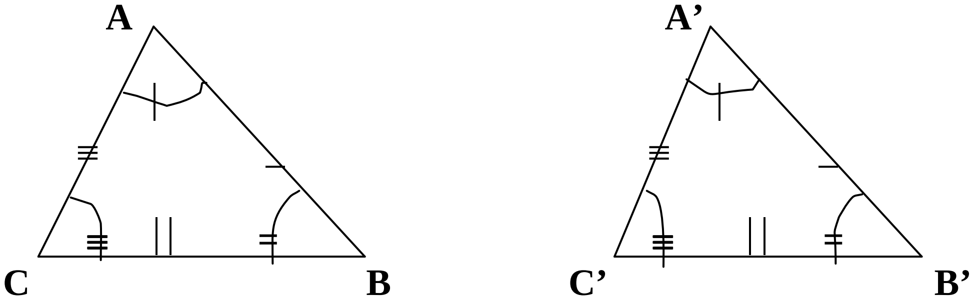
→ **Lados :** $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ e $\overline{CA}$;

→ **Ângulos internos :** medidas indicadas por a , b e c ;

→ **Ângulos externos :** medidas indicadas por x , y e z .

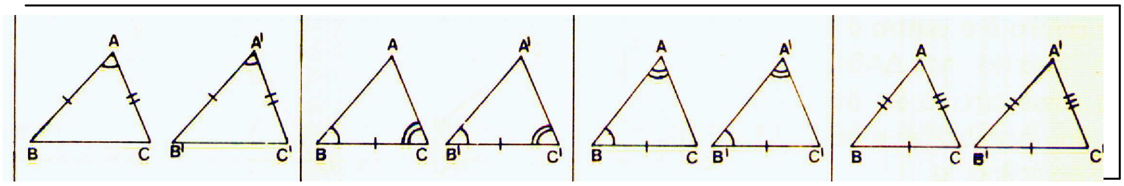
III . 2) CONGRUÊNCIA DE TRIÂNGULOS :

Dois triângulos são congruentes , ou seja , são exatamente do mesmo tamanho se , e somente se
→ Possuírem os ângulos internos correspondentes congruentes e
→ Possuírem os lados correspondentes congruentes .



Na figura anterior , os elementos correspondentes congruentes foram assinalados com o mesmo sinal , ou seja
→ **ângulos internos : A = A' , B = B'** e **C = C'**
→**Lados : AB = A'B' , BC = B'C'** e **CA = C'A'**

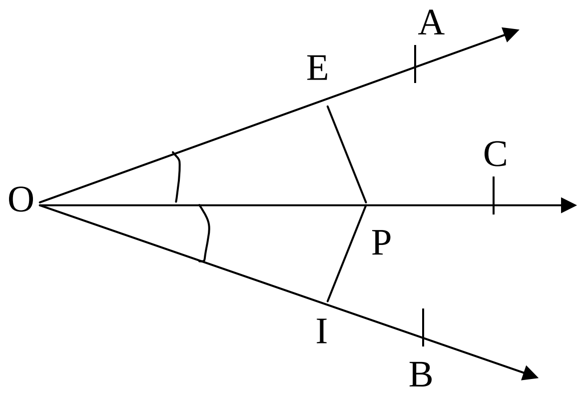
Existem condições mínimas para que dois triângulos sejam congruentes , são os quatro casos de congruência de triângulos apresentados a seguir :



CASO LAL	CASO ALA	CASO LAA_O	CASO LLL

<u>EXEMPLO</u> : Mostrar que , se um ponto pertence à bissetriz de um ângulo, então , ele é eqüidistante dos lados do ângulo .

Seja o ângulo de lados $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, seja $\overrightarrow{OC}$ a bissetriz de AÔB e seja P um ponto pertencente à bissetriz de AÔB . Veja a figura :



1º) Como PE e PI são as distâncias de P aos lados do ângulo , temos que PÊO = PÎO = 90º ;

2º) Como $\overrightarrow{OC}$ é bissetriz de AÔB , temos que PÔE = PÔI ;

3º) Considerando ainda que OP é lado comum ao triângulos POE e POI , entãos esses triângulos são congruentes pelo caso LAA_o . Logo PE = PI , ou seja , P é eqüidistante dos lados do ângulo .

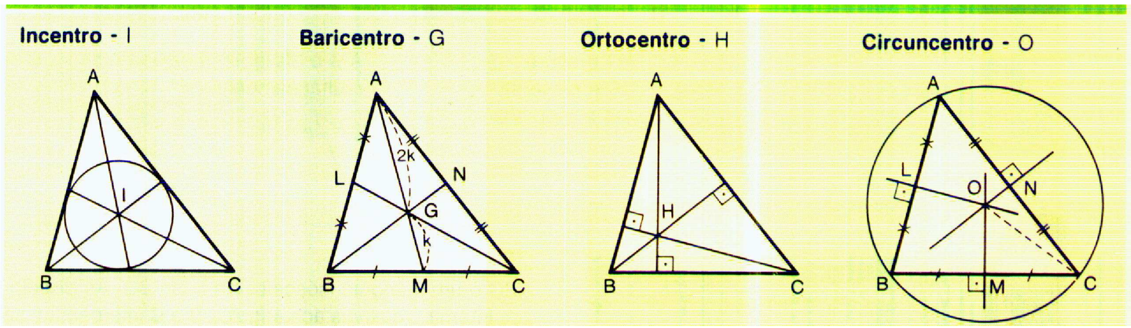
III . 3) Outros elementos do Triângulo :

a) Altura : Distância de um vértice ao lado oposto .O ponto de encontro das três alturas de um triângulo é o seu Ortocentro . Veja figura mais adiante .

b) Bissetriz Interna : Segmento que divide um ângulo interno ao meio . O ponto de encontro das três bissetrizes internos é o Incentro que é também o centro da circunferência inscrita no triângulo . Veja figura mais adiante .

c) Mediana : Segmento que une um vértice ao ponto médio do lado oposto a esse vértice . O ponto de encontro das três medianas é chamado baricentro . Veja figura mais adiante .

d) Mediatrizes do lado : É a reta perpendicular a um lado , passando pelo seu ponto médio . O ponto de encontro das três mediatrizes é o circuncentro , que é também o centro da circunferência que inscreve o triângulo . Veja figura a seguir .



Exercícios Propostos :

1) Um triângulo é isósceles quando têm dois lados congruentes . Mostrar que no triângulo isósceles
a) os ângulos da base são congruentes ;
b) a bissetriz interna do ângulo oposto à base é , ao mesmo tempo , altura e mediana relativa à base;

2) Um triângulo é eqüilátero quando tem os três lados congruentes. Mos – trar que , no triângulo eqüilátero todos os ângulos internos têm a mes – ma medida .

3) Um triângulo que possui um ângulo reto é chamado de Triângulo Re – tângulo . Os lados que formam o ângulo reto são chamados de catetos e o lado oposto ao ângulo reto é chamado de Hipotenusa . Justifique as seguintes proposições :
a) Se dois triângulos retângulos possuem seus catetos respectivamente congruentes , então esses triângulos são congruentes ;

b) Se dois triângulos retângulos possuem um cateto e um ângulo agudo formado por esse cateto respectivamente congruentes,então esses triângulos são congruentes ;

c) Se dois triângulos retângulos possuem um cateto e um ângulo agu – do oposto a esse cateto respectivamente congruentes , então esses triângulos são congruentes ;

d) Se dois triângulos retângulos possuem a hipotenusa e um cateto respectivamente congruentes , então esses triângulos são congruentes .

III . 4) <u>CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DE UM TRIÂNGULO</u> :

Se três segmentos de medidas **a** , **b** e **c** são lados de um triângulo , então deveremos ter

1º) $a + b > c$, $a + c > b$ e $b + c > a$
2º) $\lvert a - b \rvert < c$, $\lvert a - c \rvert < b$ e $\lvert b - c \rvert < a$

<u>Exercícios de Fixação</u> :

1) (UFOP – Ouro Preto/MG) - Os lados de um triângulo escaleno são números inteiros e um deles mede 4 e o outro , 7 . Se o terceiro lado mede **x** , calcule a soma dos valores possíveis de **x** .

2) (UFMG) – Num triângulo , dois lados medem 3 e 7 . Se a medida do terceiro lado pertence ao conjunto X = { 2 ,3 , 4 , 5 , 10} , quanto mede ele ?

3) (UFGO) – Se dois lados de um triângulo medem , respectivamente , 3 dm e 4 dm , quais são as possibilidades de medida do terceiro lado ?

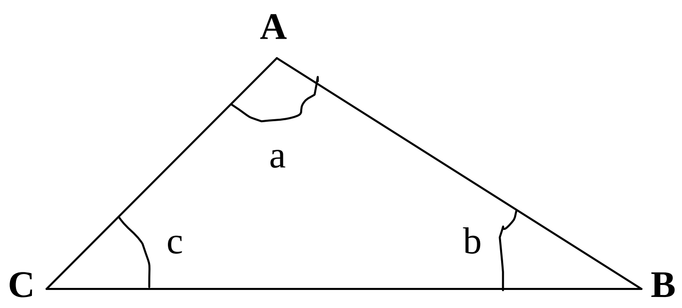
4) Se três segmentos de medidas iguais a 5 cm , 8 cm e a + 3 cm são os lados de um triângulo , quais são os valores possíveis de a ?

5) Num mapa , três cidades ocupam posições tais que não estão sobre uma mesma reta . Essas cidades , designadas por A , B e C estão posicionadas de tal modo que AB = 40 km e BC = 70 km . Se a distância entre as cidades A e C é dada por um múltiplo de todos os números do conjunto { 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 10 , 12 , 15 , 20 } , que distância é essa ?

<u>Respostas</u> : 1) 38 **2)** 5 **3)** mais do que 1 dm e menos do que 7 dm
4) $0 < a < 10$ **5)** 60 km

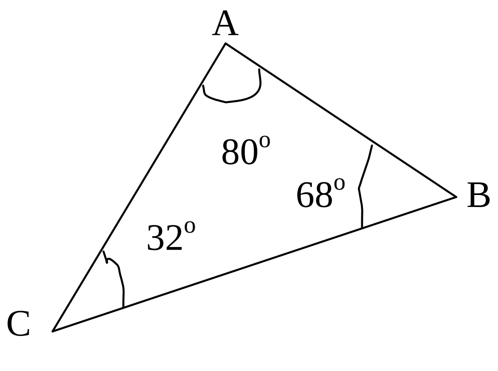
III . 5) DESIGUALDADES ENTRE LADOS E ÂNGULOS DO TRIÂNGULO :

Num triângulo , os maiores lados se opõem ao maiores ângulos e os menores lados se opõem aos menores ângulos .



SE AC < AB < BC $\Rightarrow$ b < c < a

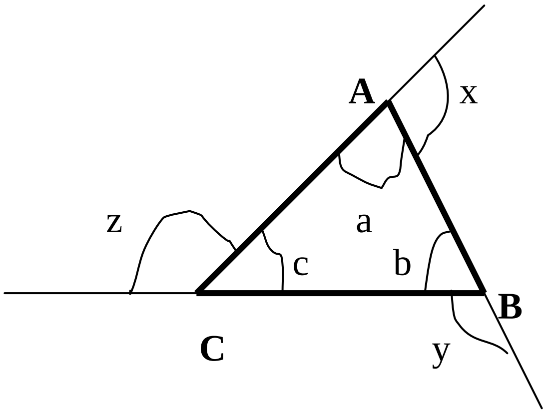
Exercício de fixação :
Em cada caso a seguir , são dadas as medidas dos ângulos ou dos lados de um trângulo . No primeiro caso , escreva ,em ordem crescente de tamanho os lados e , no segundo caso , faça o mesmo com os ângulos internos :
a) Triângulo AOE , onde AO = 4 cm , OE = 3 cm e EA = 2 cm ;
b) Triângulo AEU , onde AE = $\sqrt{7}$ cm , EU = 2 cm e UA = 5 cm ;
c) Triângulo AEI , onde AÊI = 35^o , EÎA = 70^o e IÂE = 75^o ;
d) Triângulo OIA , onde AÔI = 27^o , OÂI = 77^o e OÎA = 76^o ;
e) Triângulo ABC , representado a seguir :



<u>Respostas</u> : a) EÔA<EÂO<AÊO **b)** EÂU<EÛA<UÊA **c)** AI<AE<EI
d) AI<OI<AO **e)** AB<AC<BC

III . 6) <u>PROPRIEDADES ANGULARES DOS TRIÂNGULOS</u> :

Na figura a seguir , são representados os **ângulos internos a , b** e **c** e **os ângulos externos x , y** e **z** de um triângulo **ABC** .



Pode-se provar que :

1º) a + b + c = 180º

2º) x + y + z = 360º

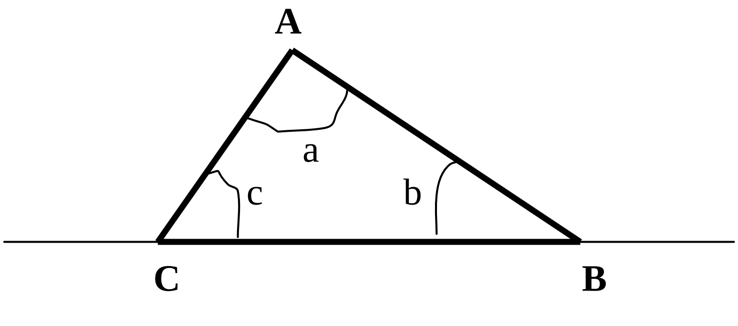
3º) x = b + c ; y = a + c e z = a + b

Em geral , num triângulo

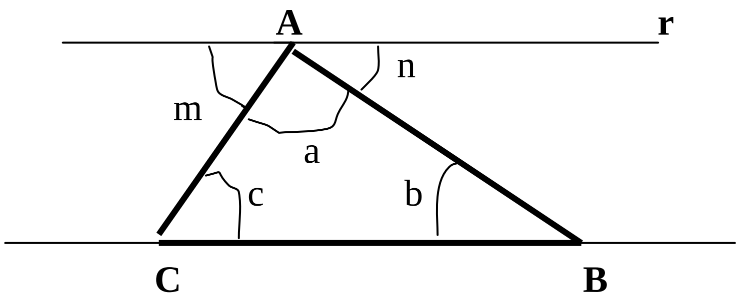
1º) A SOMA DOS ÂNGULOS INTERNOS VALE 180º ; **2º) A SOMA DOS ÂNGULOS EXTERNOS VALE 360º ;** **3º) QUALQUER ÂNGULO EXTERNO É A SOMA DE DOIS ÂNGULOS INTERNOS QUE NÃO LHE SEJAM ADJACENTES (vizinhos) .**

<u>EXEMPLOS</u> :

1) Provar as três propriedades enunciadas acima .
Consideremos a figura abaixo :

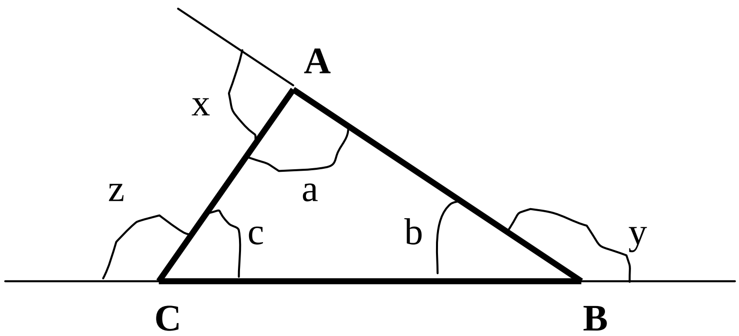


Tracemos a reta **r** , pelo vértice **A** , paralela ao lado $\overline{\textbf{BC}}$:



1º) Os ângulos de medidas **m** e **c** são alternos internos assim como os de medidas **n** e **b** . Então **m = c** e **n = b** ; logo **m+a+n = a + + b + c = 180°** .

2º) Considere agora a figura a seguir :



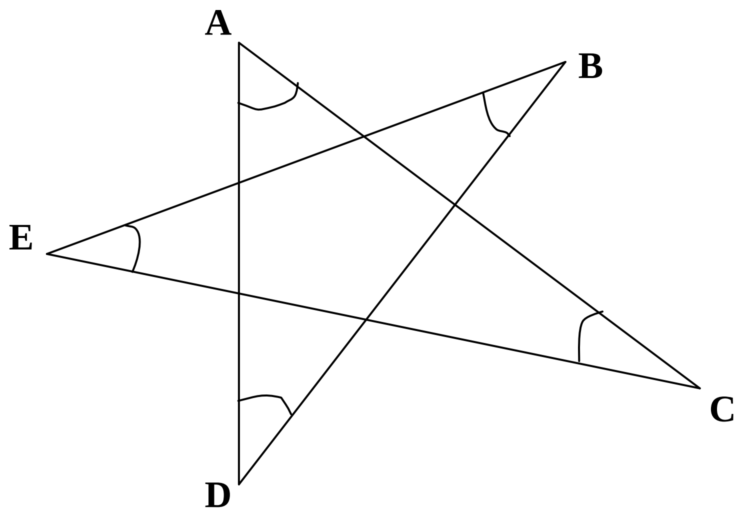
a) Pela figura , temos que **x + a = 180º** ⇒ **a = 180º – x** e já provamos que **a + b + c = 180º** , ou seja , **(180º – x) + b + c = 180º** . Isolando **x** , teremos enfim que **x = b + c** ;

b) Pela figura , temos que **y + b = 180º** ⇒ **b = 180º – y** e já provamos que **a + b + c = 180º** , ou seja , **a + (180º – y) + c = 180º** . Isolando **y** , teremos enfim que **y = a + c** ;

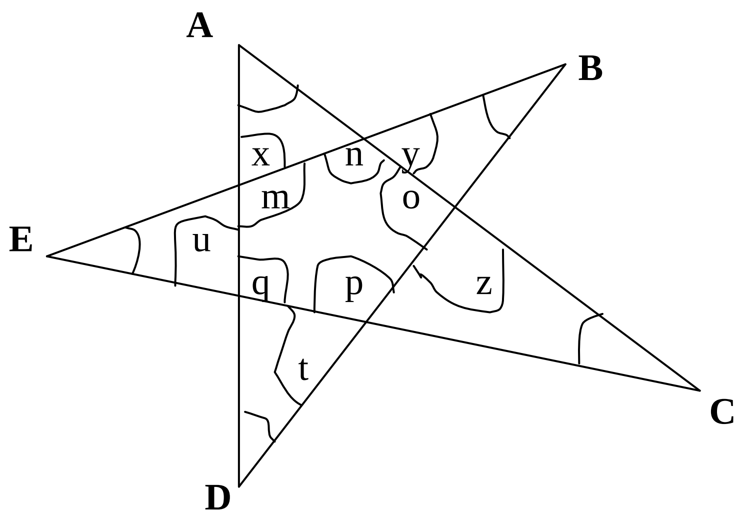
c) Pela figura , temos que **z + c = 180º** ⇒ **c = 180º – z** e já provamos que **a + b + c = 180º** , ou seja , **a + b + (180º – z) = 180º** . Isolando **z** , teremos enfim que **z = a + b** .

3º) Como **a = 180º – x** , **b = 180º – y** , **c = 180º – z** e **a + b + c = = 180º** , podemos escrever que **(180º – x) + (180º – y) + (180º – - z) = 180º** . Então **x + y + z = 360º** .

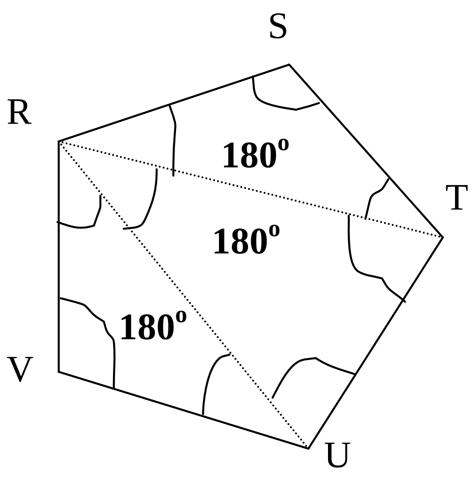
2) **(PUC – SP) –** Calcular a soma dos ângulos de vértices A , B , C , D e E , assinalados na figura abaixo :



Assinalemos alguns ângulos auxiliares na figura :



1º) Observemos que o polígono central é um pentágono (5 lados) . A soma dos ângulos internos desse polígono pode ser calculada do seguinte modo : Traçando todas as diagonais de um mesmo vértice , teremos três triângulos (veja figura a seguir) . Como , em cada triângulo , a soma dos ângulos internos é 180^o, logo , a soma dos ângulos internos do pentágono será $3 \cdot 180^o = 540^o$.



2º) Cada ponta da estrela na figura dada é um triângulo onde os ângu – los internos do pentágono são ângulos externos dos triângulos . Então , temos :

n = x + A , **o = y + B** , **p = z + C** , **q = t + D** e **m = n + E**

Somando , membro a membro , as equações acima , teremos :

n + o + p + q + m = x + y + z + t + n + A + B + C + D + E

De onde **A + B + C + D + E = 540º - 360º = 180º** .

<u>OBSERVAÇÕES</u> :

1ª) A soma dos ângulos internos de qualquer polígono convexo pode ser calculada como fizemos com o pentágono . Na verdade ,quando traçamos cada diagonal de um mesmo vértice , determinamos um triângulo . Como os dois vértices vizinhos não podem ser ligados (pois não determinariam diagonais) , se o polígono tem **n** vértices , temo então **n – 2** triângulos . Então , para esse polígono , teremos $\mathbf{S_n = 180^o \cdot (n - 2)}$.

2ª) A soma dos ângulos externos de qualquer polígono convexo é 360º , pois , em todo polígono convexo , um ângulo interno é suplementar do externo seu vizinho . Então , para cada vérice , teremos uma soma do tipo **i + e = 180º** , onde **i** é a medida de um ângulo interno e **e** é a medida do externo seu vizinho . Somando essas **n** equações , membro a membro , teremos :
Soma dos internos + Soma dos externos = 180º . n , ou seja

180^o . (n – 2) + Soma dos externos = 180^o . n de onde tiramos que

a **Soma dos externos é igual a 360^o** .

3ª) Um polígono convexo é regular , quando todos os seus lados têm a mesma medida e todos os seus ângulos internos têm a mesma medida .Então , podemos dizer que

a) Cada ângulo interno de um polígono regular é $\mathbf{I_n} = \dfrac{180^o\,(n-2)}{n}$.

b) Cada ângulo externo de um polígono regular é $\mathbf{E_n} = \dfrac{360^o}{n}$.

Em ambos os casos **n** é o número de lados do polígono convexo .

4ª) O número de diagonais de um polígono convexo D_n pode ser calculado pela relação $\mathbf{D_n} = \dfrac{n(n-3)}{2}$. Uma justificativa para essa relação é o seguinte fato : Toda diagonal é determinada pela união de dois vérti – ces não vizinhos no polígono . Então , cada vértice é unido a todos os outros , exceto três (os dois vizinhos e o próprio vértice) . Logo , os n vétices se unem aos outros n-3 vértices . Mas esse processo considera cada diagonal duas vezes (p. ex. AB = BA) ; por isso divide-se o re – sultado por dois .

Exercícios de Fixação :

1) Em cada caso a seguir , são dadas algumas medidas de ângulos de um triângulo . Calcule o que se pede .

a) Se dois ângulos internos medem 63^o e 27^o , quanto mede o outro ?

b) Se dois ângulos internos medem $32^o15'$ e $76^o45'$, quanto mede o outro ?

c) Se o triângulo é isósceles com ângulo oposto à base medindo 47^o , quanto medem os outros dois ?

d) Se o triângulo é eqüilátero , quanto medem seus ângulos internos ?

e) Se o triângulo é eqüilátero , quanto medem seus ângulos externos ?

f) Se dois ângulos externos medem 110^o e 100^o , quanto mede o ângulo interno não adjacente a esses dados ?

2) Se os ângulos internos de um triângulo têm suas medidas dadas pelas expressões $2x - 10^o$, $x + 35^o$ e $3x - 5^o$, qual é o valor de x ?

3) Dois ângulos internos de um triângulo têm suas medidas dadas pelas expressões $3a - 12^o$ e $5a + 15^o$ e o externo não adjacente a eles mede 163^o . Quais são as medidas dos ângulos internos desse triângulo ?

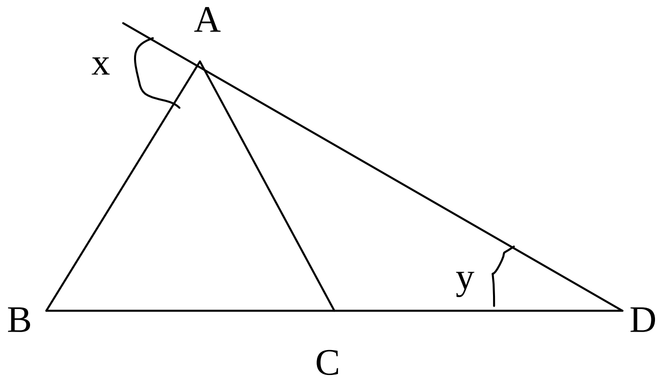
4) Os três ângulos externos de um triângulo medem $7x + 10^o$, $6x$ e $4x + 10^o$. Quanto medem os ângulos internos desse triângulo ?

5) Num triângulo ABC , os ângulos internos com vértices em A e C têm suas medidas dadas, respectivamente , pelas expressões $2a$ e $2b$. Se o ângulo externo com vértice em B mede 130^o e $a - b = 15^o$, calcule os valores de a e b .

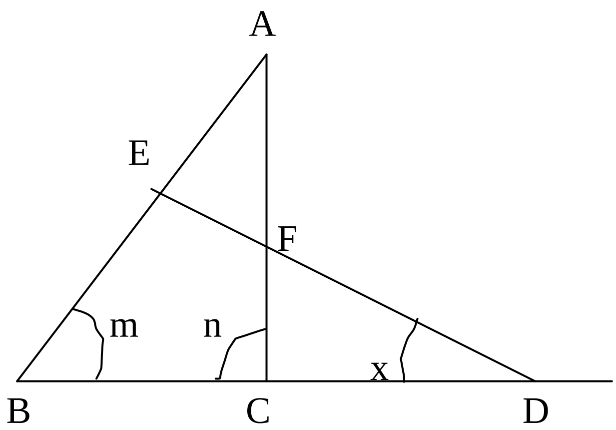
6) Calcule os ângulos da base de um triângulo isósceles , sabendo-se que cada um deles vale o dobro do ângulo do vértice .

7) Em um triângulo , um dos ângulos internos mede 50^o. Calcule a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes dos outros dois ângulos do triângulo .

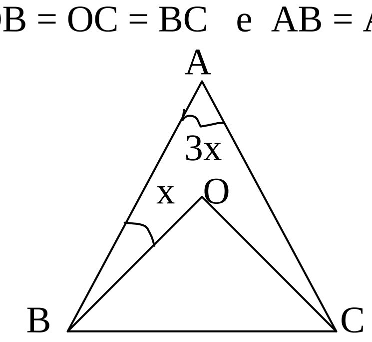
8) Na figura , sabe-se que AB = AC = CD . Calcule x em função de y .



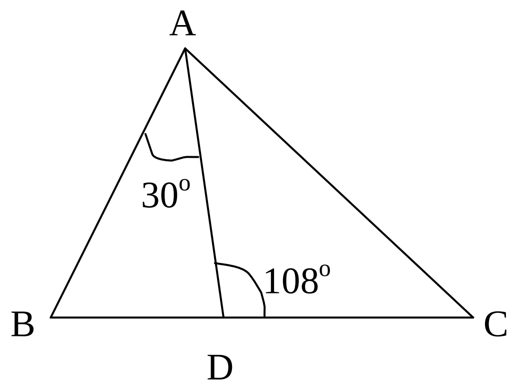
9) Na figura , calcule x em função de m e n , sendo AE = AF .



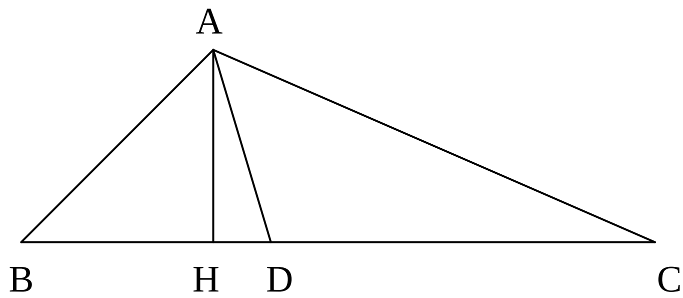
10) Na figura , OB = OC = BC e AB = AC . Calcule x , em graus .



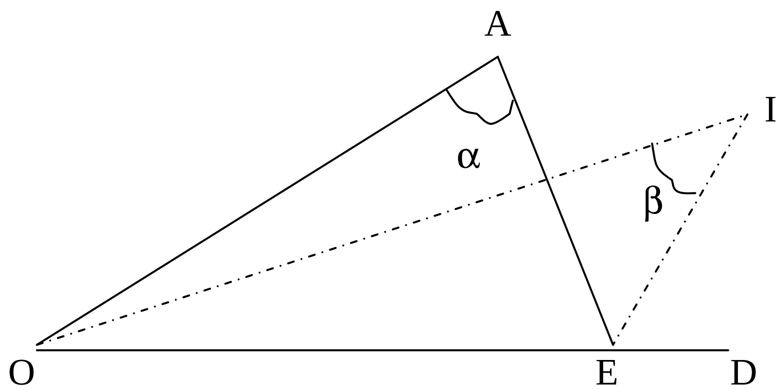
11) Na figura , AD é uma bissetriz interna do triângulo ABC . Calcule os ângulos internos do triângulo ABC .



12) O triângulo ABC da figura é retângulo em A . AH é altura e AD é bissetriz interna . Calcule os ângulos de vértices B e C , sabendo que a medida do ângulo HÂD é iguala a 25^o .

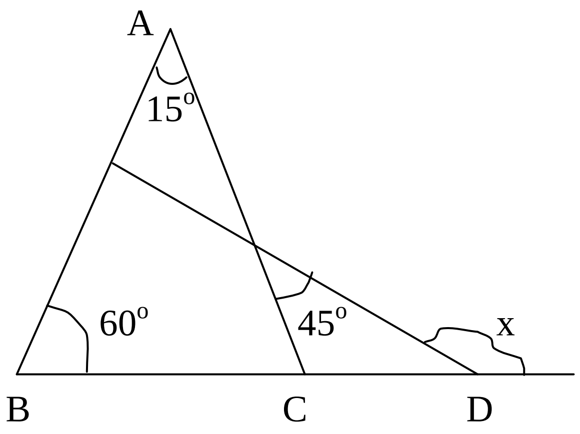


13) Na figura , OI e EI são , respectivamente as bissetrizes dos ângulos AÔE e AÊD . Se $\alpha + \beta = 75^{\mathbf{o}}$, calcule β .

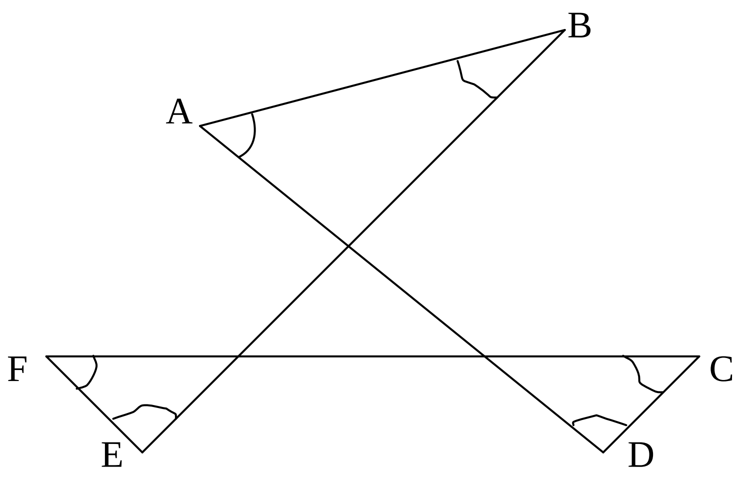


14) Num triângulo ABC , a altura AH forma com a bissetriz interna AP um ângulo de 18^o ; as bissetrizes internas que saem dos vértices B e C formam um ângulo de 130^o . Quanto mede o maior ângulo do tri – ângulo ABC ?

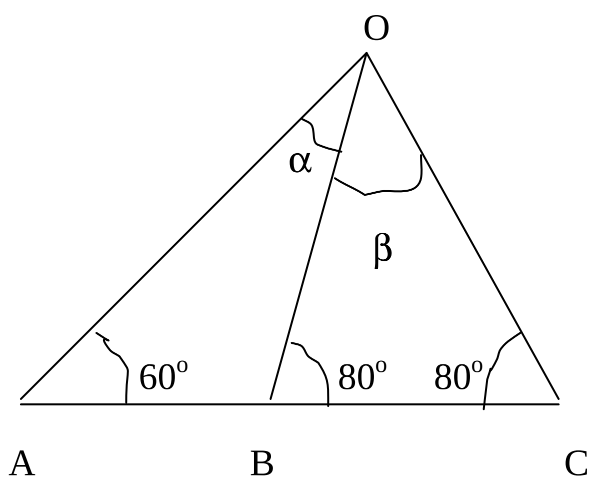
15) Calcular o valor de x , de acordo com os dados da figura :



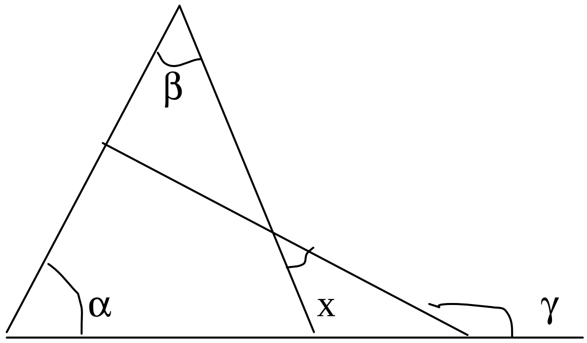
16) Calcular a soma dos ângulos de vértices A,B,C,D,E e F , assinalados na figura :



17) (UFMG) – Quanto medem os ângulos α e β da figura ?



18) (PUC – MG) - Obtenha x em função de α ,β e γ na figura :



19) (PUC – MG) - Num triângulo ABC , os ângulos internos de vértices B e C medem , respectivamente , 60^o e 20^o . Calcule a medida do complemento do ângulo formado pela bissetriz interna e pela altura que partem do vértice A .

20) (UFMG) – Em um triângulo ABC , o ângulo interno de vértice A mede $\frac{\pi}{7}$ radianos . Calcule , em radianos , a medida do ângulo agudo formado pelas bissetrizes internas dos ângulos de vértices B e C .

21) (UFMG) – No triângulo ABC , o ângulo interno de vértice C mede $\frac{\pi}{6}$ radianos e a bissetriz interna do ângulo de vértice A corta o lado BC no ponto D , tal que AD = DC . Quanto mede o ângulo interno de vértice B ?

22) Calcule o número de diagonais de um

a) Octógono .
b) Dodecágono .
c) polígono de 3n lados .
d) polígono de n – 3 lados .

23) Que polígono convexo tem o número de diagonais igual ao número de lados ?

24) A diferença entre os números de lados de dois polígonos convexos é 5 e a diferença entre os números de diagonais é 40 . Que polígo – nos são esses ?

25) As medidas dos ângulos internos de um pentágono convexo são dadas por x , x+ 10^o, x-20^o , 2x e x+30^o . Quanto mede o maior dos ângulos ?

26) Quanto mede cada ângulo interno de um dodecágono regular ?

27) A diferença entre a medida do ângulo interno e a do externo de um polígono regular é 120^o . Que polígono é esse ?

28) Se AB , BC , CD e DE são quatro lados consecutivos de um icoságono regular e os prolongamentos dos lados AB e DE cortam-se no ponto I . Calcular o ângulo BÎD .

29) **(PUC – MG) –** A diferença entre o número de lados de dois polí – gonos é 4 , e a diferença entre o número de suas diagonais é 26 . Quais são os números de lados desses polígonos ?

30) Os números de lados de dois polígonos convexos são pares conse – cutivos e um deles possui 11 diagonais a mais que o outro . Calcu - le a soma dos números de lados desses polígonos .

31) No polígono convexo ABCDE... , as bissetrizes dos ângulos internos de vértices A e C formam um ângulo que é a quarta parte do ângulo interno . Que polígono é esse ?

32) Determinar o polígono regular em que o ângulo formado pelas mediatrizes de dois lados consecutivos mede 30^o .

33) Em que polígono convexo as bissetrizes de dois ângulos internos de vértices consecutivos formam um ângulo de 45^o .

<u>Respostas</u> : **1)** a) 90^o b) 71^o c) $66^o30'$ d) 60^o e) 120^o f) 30^o **2)** $26^o40'$ **3)** 48^o , 115^o e 17^o **4)** 30^o , 60^o e 90^o **5)** a = 40^o e b = 25^o **6)** 60^o **7)** 65^o **8)** x = 3y **9)** $x = \frac{m - n}{2}$ **10)** 12^o **11)** 60^o , 78^o e 42^o **12)** 70^o e 20^o resp. **13)** 25^o **14)** 80^o **15)** 120^o **16)** 360^o **17)** 20^o e 20^o **18)** $x = \gamma - \alpha - \beta$ **19)** 70^o **20)** $\frac{3\pi}{7}$ **21)** $\frac{\pi}{2}$ rad **22)** a) 20 b) 54 c) $\frac{9(n-3)}{2}$ d) $\frac{(n-3)(n-6)}{2}$ **23)** pentágono **24)** heptágono e dodecágono **25)** 163^o 20' **26)** 150^o **27)** dodecágono regular **28)** 126^o **29)** 6 e 10 **30)** 14 **31)** polígono de 18 lados **32)** dodecágono regular **33)** octógono regular .